Διαφορικές εξισώσεις Χωριζόμενων Μεταβλητών:

Έστω η διαφορική εξίσωση:

$$y' = \frac{P(x)}{Q(y)} \Rightarrow y' \cdot Q(y) = P(x) \Rightarrow Q(y)\frac{dy}{dx} = P(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(y)\,dy = P(x)\,dx \Rightarrow \int Q(y)\,dy = \int P(x)\,dx.$$

Π.χ.1 (Ασκ. 2ii Φυλλάδιο 2ο)
Να επιλυθεί το αρχικό πρόβλημα τιμών

$$(y + x^2 \cdot y)\,y' = x \quad , \alpha\nu \quad y(1) = 0$$

ΛΥΣΗ

$$(y + x^2 \cdot y)\,y' = x \Rightarrow y(1+x^2)\,y' = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot (1+x^2) \cdot \frac{dy}{dx} = x \Rightarrow y\,dy = \frac{x}{1+x^2}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int y\,dy = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = \log(1+x^2) + 2c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = +\sqrt{\log(1+x^2)+2c} \xRightarrow{x=1} c = -\log 2/2 \\ y = -\sqrt{\log(1+x^2)+2c} \end{cases}$$

Άρα,

$$y = \pm\sqrt{\log(1+x^2) - \log 2} = \pm\sqrt{\frac{\log(1+x^2)}{2}}$$

Με Π.Ο. $x \leq -1$ ή $x \geq 1$

Με ορισμένη ολοκλήρωση θα γίνει

$$\int_{y(1)}^{y(x)} u\,du = \frac{1}{2}\int_1^x \frac{2u}{1+u^2}\,du \ \ldots$$

Π.χ2 (Ασκ. 1 ii φυλλάδιο 2ο)

Να επιλυθεί το αρχικό πρόβλημα τιμών

$xy\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$

Λύση

Αν $y = c \Rightarrow dy = 0$ , $xc\,dx = 0 \Rightarrow c = 0$

$xy\,dx = -(1+x^2)\,dy \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{(1+x^2)}\,dx = -\frac{dy}{y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \log|y| = c \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\left(|y|\cdot\sqrt{1+x^2}\right) = c \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\left(|y|\cdot\sqrt{1+x^2}\right) = c \Rightarrow$

$\Rightarrow |y|\cdot\sqrt{1+x^2} = e^c \Rightarrow$

$\Rightarrow |y| = \frac{e^c}{\sqrt{1+x^2}}$ , $x\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow |y| = \frac{c_1}{\sqrt{1+x^2}}$ , $c_1>0$ $x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y = \pm\frac{c_1}{\sqrt{1+x^2}}$ , $c_1>0$ $x\in\mathbb{R}$

## ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Α' ΤΑΞΗΣ:

Εστω $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to I \subseteq \mathbb{R}$ ομογενής, με βαθμό $n$ όταν:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{n} \cdot f(x,y) \quad , \quad (x,y) \in \Omega$$

Π.χ

$$f(x,y) = 2xy^2 + 3x^2 \cdot y + x^3 \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Είναι $f(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda x \cdot \lambda^2 y^2 + 3\lambda^2 x^2 \cdot \lambda y + \lambda^3 x^3 =$
$= \lambda^3 \cdot (2xy^2 + 3x^2 y + x^3) = \lambda^3 f(x,y)$

$$y' = \frac{g(x,y)}{h(x,y)} \quad (*)$$

Τότε η αντικατάσταση $y = zx$ μετατρέπει την $(*)$ σε εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών α' τάξης

Π.χ

Για την εξίσωση:

$$(x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0 \quad \text{οπου} \quad y(1) = 1$$

ΛΥΣΗ

Θέτω $y = z \cdot x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = z'x + z = \frac{dz}{dx}x + z \Rightarrow$

$\Rightarrow dy = x\,dz + z\,dx$

Άρα, στην αρχική εξίσωση, έχουμε:

$$(x^2 + x^2 \cdot z^2)\,dx + 2x \cdot zx\,(x\,dz + z\,dx) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1+z^2)\,dx + 2z\,(x\,dz + z\,dx) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1 + z^2 + 2z^2)\,dx + 2zx\,dz = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1+3z^2)\,dx = -2xz\,dz \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{3 \cdot 2z}{1+3z^2}\,dz \Rightarrow$$

$$-\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}\int_{z(1)}^{z(x)} \frac{6u}{1+3u^2}\,du \Rightarrow \dots$$

## ΑΣΚΗΣΗ

Να φέρετε την εξίσωση $y' = \dfrac{ax+\beta y+\gamma}{a_1x+\beta_1 y+\gamma_1}$ (*)
όπου $a\beta_1 - a_1\beta \neq 0$ σε μια
εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών

ΛΥΣΗ

Θέτω $y = Y + y_0$ και $x = X + x_0$
$dy = dY$ και $dx = dX$

Η εξίσωση γράφεται

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a(X+x_0)+\beta(Y+y_0)+\gamma}{a_1(X+x_0)+\beta_1(Y+y_0)+\gamma_1} =$$

$$= \frac{aX+\beta Y + ax_0+\beta y_0+\gamma}{a_1X+\beta_1Y+(a_1x_0+\beta_1y_0+\gamma_1)}$$

Παρατηρώ ότι το γραμ. σύστημα

$$\begin{cases} ax_0+\beta y_0+\gamma=0 \\ a_1x_0+\beta_1y_0+\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} a & \beta \\ a_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = -a_1\beta + a\beta_1 \neq 0$$

Μοναδική λύση η: $x_0 = \dfrac{D_{x_0}}{D}$ & $y_0 = \dfrac{D_{y_0}}{D}$
Επομένως, επιλέγοντας $x_0, y_0$
στην (*) έχουμε:

$\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{aX+\beta Y}{a_1X+\beta_1Y}$ η οποία είναι ομογενής
άρα θέτω $Y = zX$ και
τη φέρνω σε μορφή χωριζόμενων
μεταβλητών!

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$(x-y+3)dx + (x+2y-3)dy = 0$

ΛΥΣΗ

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{(x-y+3)}{x+2y-3} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y-x-3}{x+2y-3} \quad (1)$$

Θέτω $x = X + x_0$ και $y = Y + y_0$

$$(1) \to \frac{dx}{dy} = \frac{Y+y_0-X-x_0-3}{X+x_0+2(Y+y_0)-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{Y-X+(y_0-x_0-3)}{X+2Y+(2y_0+x_0-3)} \quad (2)$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_0 - x_0 = 3 \\ 2y_0 + x_0 = 3 \end{array}\right| \Rightarrow 3y_0 = 6 \Rightarrow y_0 = 2 \quad \text{και} \quad x_0 = -1.$$

Άρα, $x = X - 1$ και $y = Y_0 + 2$

και η (2) είναι:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{Y-X}{X+2Y} \quad (\text{ομογενής})$$

Θέτω $y = zx$ και καταλήγουμε

$$\frac{\cancel{1/2}\, z}{\cancel{1/2}\, z^2}\, dz = \frac{1}{x}\, dx \Rightarrow \int \frac{1}{z}\, dz = \int \frac{1}{x}\, dx$$

χωριζόμενων μεταβλητών ....